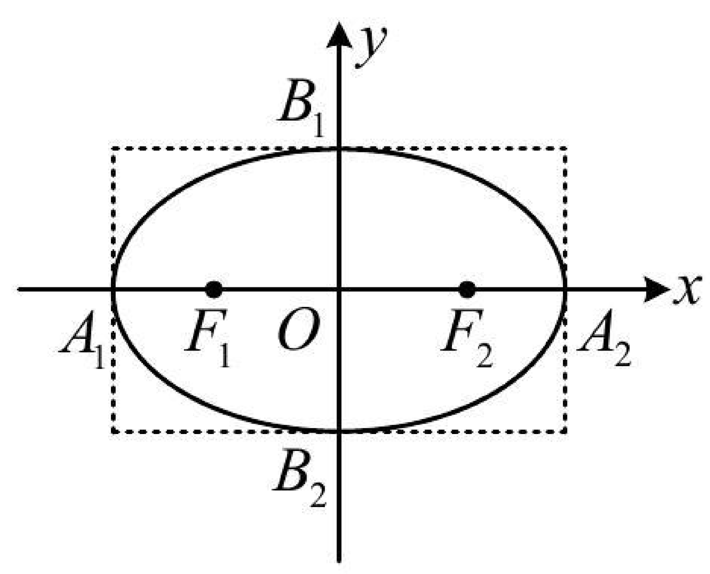
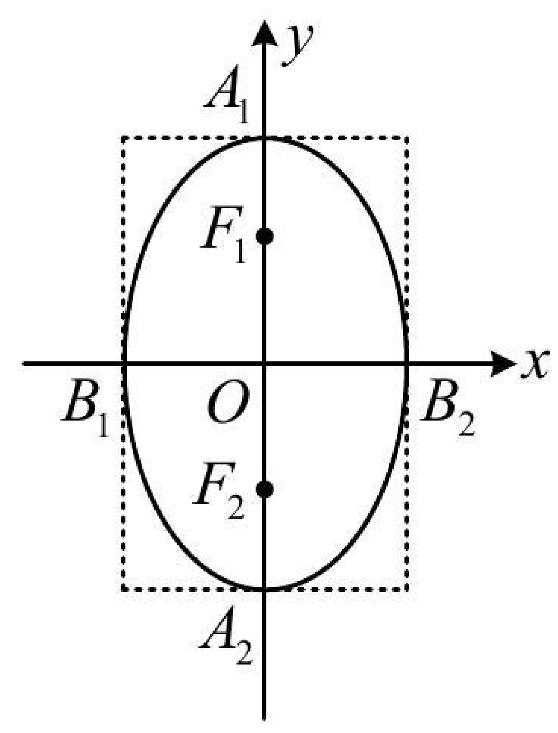
模块三 椭圆与方程

第 1 节 椭圆的定义、标准方程及简单几何性质（★★）

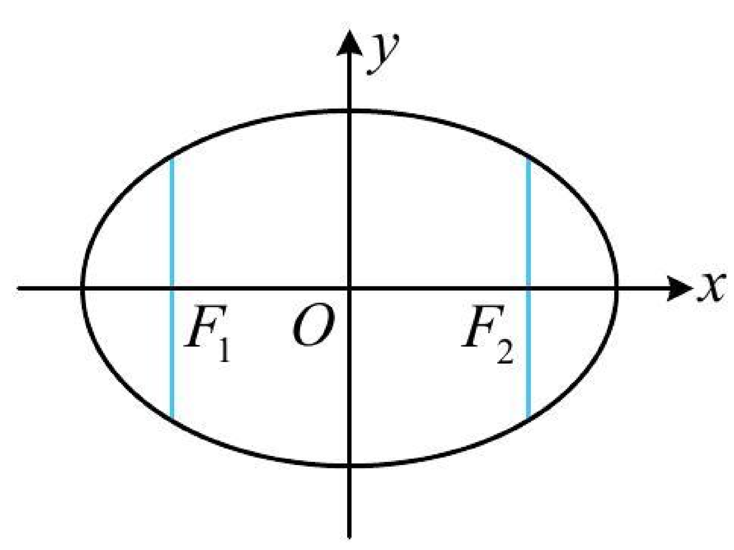
内容提要

1．椭圆定义：设 F_1， F_2 是平面上的两个定点，若平面内的点 P 满足 $|PF_1|+|PF_2|=2a(2a>|F_1F_2|)$，则点 P 的轨迹是以 F_1， F_2 为焦点的椭圆.

2．椭圆的简单几何性质：

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$
焦点坐标	$F_1(-c,0)$， $F_2(c,0)$	$F_1(0,c)$， $F_2(0,-c)$
焦距	$\lvert F_1F_2\rvert=2c$，且 $c^2=a^2-b^2$	
图形		
范围	$-a\le x\le a$， $-b\le y\le b$	$-b\le x\le b$， $-a\le y\le a$
对称性	关于 x 轴、y 轴、原点对称	
顶点坐标	左、右顶点： $A_1(-a,0)$， $A_2(a,0)$ 上、下顶点： $B_1(0,b)$， $B_2(0,-b)$	左、右顶点： $B_1(-b,0)$， $B_2(b,0)$ 上、下顶点： $A_1(0,a)$， $A_2(0,-a)$
长轴长	$\lvert A_1A_2\rvert=2a$，其中 a 叫做长半轴长	
短轴长	$\lvert B_1B_2\rvert=2b$，其中 b 叫做短半轴长	
离心率	$e=\frac{c}{a}(0<e<1)$	

3．通径：经过椭圆焦点且垂直于长轴的弦叫做通径（如图中两条蓝色的线段），其长度为 $\frac{2b^2}{a}$.



典型例题

类型Ⅰ：椭圆定义的运用

【例 1】椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1， F_2，点 P 在椭圆上，若 $|PF_1|=4$，则 $|PF_2|=$_____； $\angle F_1PF_2$ 的大小为_____； ΔPF_1F_2 的周长为_____；若延长 PO 交椭圆于 Q，则 $|PF_1|+|F_1Q|=$_____.

解析：椭圆中给出 $|PF_1|$，可由定义求 $|PF_2|$，由题意， $a=3$， $b=\sqrt{2}$， $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7}$，

因为$|PF_1|+|PF_2|=2a=6$，且$|PF_1|=4$，所以$|PF_2|=6-|PF_1|=2$；

要求$\angle F_1PF_2$，可先求$|F_1F_2|$，在ΔPF_1F_2中由余弦定理推论求$\cos\angle F_1PF_2$，

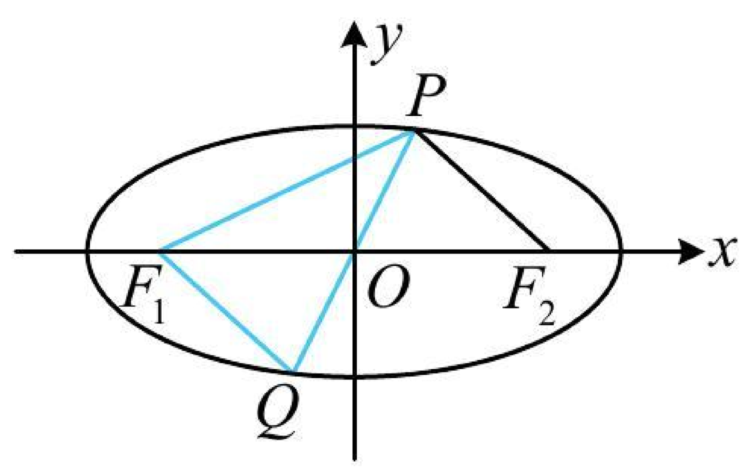
如图，$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{7}$，所以$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\dfrac{16+4-28}{2\times4\times2}=-\dfrac{1}{2}$，故$\angle F_1PF_2=120^{\circ}$；

ΔPF_1F_2的周长为$|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=6+2\sqrt{7}$；

由椭圆的对称性，O是PQ中点，而O也是F_1F_2的中点，所以四边形PF_1QF_2为平行四边形，

从而$|QF_1|=|PF_2|=2$，故$|PF_1|+|QF_1|=4+2=6$.

答案：2；120°；$6+2\sqrt{7}$；6



【变式】(2021·新高考Ⅰ卷)已知F_1，F_2是椭圆$C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$的两个焦点，点$M$在$C$上，则$|MF_1|\cdot|MF_2|$的最大值为(　　)

(A) 13　　(B) 12　　(C) 9　　(D) 6

解析：由椭圆定义，$|MF_1|$与$|MF_2|$的和为定值，故可用不等式$mn\le(\dfrac{m+n}{2})^2$来求积的最大值，

由题意，$a=3$，所以$|MF_1|+|MF_2|=2a=6$，故$|MF_1|\cdot|MF_2|\le(\dfrac{|MF_1|+|MF_2|}{2})^2=9$，

当且仅当$|MF_1|=|MF_2|=3$时取等号，所以$|MF_1|\cdot|MF_2|$的最大值为9.

答案：C

【反思】涉及椭圆上的点到两焦点距离的问题，可优先往椭圆定义上思考.

【例2】已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$A(1,2)$，$P$为椭圆$C$上的动点，则$|PA|-|PF_1|$的最小值为_____.

解析：如图，A在椭圆外，不易直接分析$|PA|-|PF_1|$的最小值，可考虑用椭圆定义将$|PF_1|$换成$|PF_2|$来看，

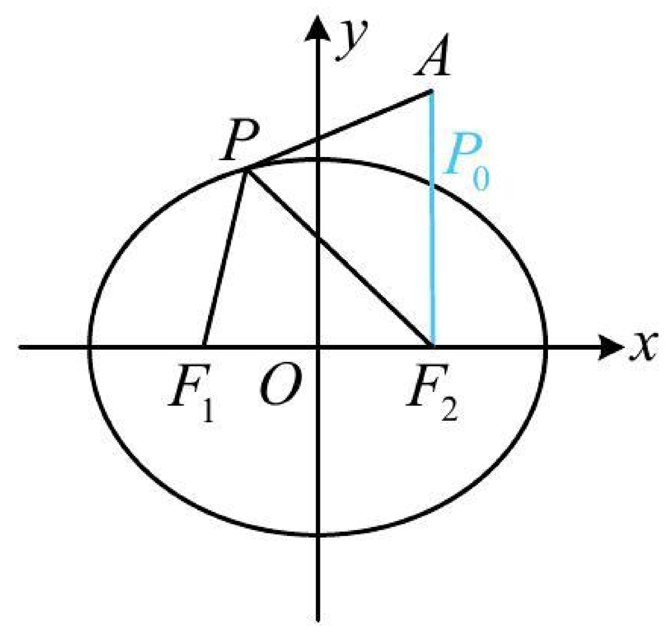
由题意，$|PF_1|+|PF_2|=4$，所以$|PF_1|=4-|PF_2|$，故$|PA|-|PF_1|=|PA|-(4-|PF_2|)=|PA|+|PF_2|-4$　①，

由三角形两边之和大于第三边知$|PA|+|PF_2|\ge|AF_2|$，结合①得：$|PA|-|PF_1|=|PA|+|PF_2|-4\ge|AF_2|-4$　②，

当且仅当点P位于图中P_0处时取等号，椭圆的半焦距$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-3}=1$，所以$F_2(1,0)$，

又$A(1,2)$，所以$|AF_2|=2$，代入②知$|PA|-|PF_1|\ge2-4=-2$，故$|PA|-|PF_1|$的最小值为-2.

答案：-2



【反思】涉及椭圆上的点到一个焦点的距离的最值问题，若不易直接求解，则可考虑用椭圆定义，转化到另一个焦点去分析.

【变式】已知$F(2,0)$是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点，椭圆的过 F 且垂直于长轴的弦长为 6，若$A(-2,\sqrt{2})$，M 为椭圆上的动点，则$|MF|+|MA|$的最大值为_____.

解析：先求 a 和 b，$F(2,0)\Rightarrow a^2-b^2=4$ ①，由通径公式，过 F 且垂直于长轴的弦长为$\dfrac{2b^2}{a}=6$ ②，

联立①②解得：$a=4$，$b=2\sqrt{3}$，

如图，直接分析$|MF|+|MA|$的最值不易，可考虑用椭圆定义将$|MF|$转化为 M 与左焦点的距离再看，

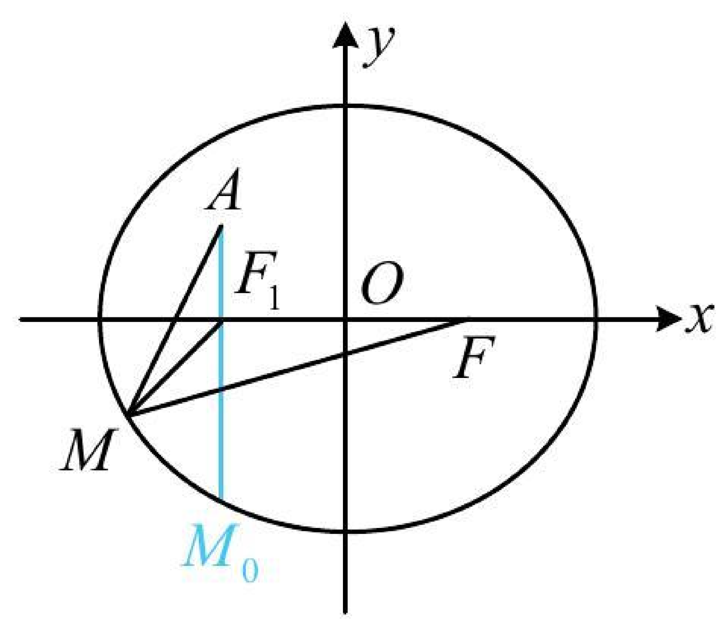
设椭圆的左焦点为$F_1(-2,0)$，则$|MF|+|MF_1|=2a=8$，所以$|MF|=8-|MF_1|$，

故$|MF|+|MA|=8-|MF_1|+|MA|=|MA|-|MF_1|+8$ ③，

由三角形两边之差小于第三边知$|MA|-|MF_1|\le|AF_1|=\sqrt{2}$，结合③得：$|MF|+|MA|=|MA|-|MF_1|+8\le\sqrt{2}+8$，

当且仅当点 M 位于图中 M_0 处时取等号，所以$|MF|+|MA|$的最大值为$\sqrt{2}+8$.

答案：$\sqrt{2}+8$



类型Ⅱ：椭圆的标准方程与简单几何性质

【例 3】椭圆$x^2+my^2=1$的焦点在 y 轴上，长轴长是短轴长的 2 倍，则$m=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{4}$　（B）$\dfrac{1}{2}$　（C）2　（D）4

解析：为了看出椭圆的长半轴长 a 和短半轴长 b，先将所给方程化为椭圆的标准方程，

$x^2+my^2=1\Rightarrow\dfrac{y^2}{\frac{1}{m}}+\dfrac{x^2}{1}=1$，所以$a=\sqrt{\dfrac{1}{m}}$，$b=1$，因为长轴长是短轴长的 2 倍，所以$2a=2\times 2b$，

从而 $a=2b$，故 $\sqrt{\frac{1}{m}}=2$，解得：$m=\frac{1}{4}$.

答案：A

【变式 1】椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{9}=1$ 的焦距为 4，则 m 的值为_____.

解析：没有规定椭圆的焦点在哪个坐标轴，故需讨论，

若椭圆的焦点在 x 轴上，则 $m>9$，且半焦距 $c=\sqrt{m-9}$，由题意，椭圆的焦距为 4，

所以 $2c=2\sqrt{m-9}=4$，解得：$m=13$；

若椭圆的焦点在 y 轴上，则 $0<m<9$，且半焦距 $c=\sqrt{9-m}$，所以 $2c=2\sqrt{9-m}=4$，解得：$m=5$；

综上所述，m 的值为 13 或 5.

答案：13 或 5

【变式 2】椭圆的中心在原点，焦点在 x 轴上，离心率 $e=\frac{1}{2}$，且过点 $(2\sqrt{2},\sqrt{3})$，则椭圆的方程为_____.

解析：由题意，可设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

已知离心率，可找到 a，b，c 的比例关系，将变量归一化，

由题意，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $a=2c$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}c$，故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，

最后求 c，将已知的点代入即可，椭圆过点 $(2\sqrt{2},\sqrt{3})\Rightarrow\frac{8}{4c^2}+\frac{3}{3c^2}=1$，解得：$c=\sqrt{3}$，

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$.

答案：$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$

【变式 3】对称轴为坐标轴的椭圆经过 $P(-2\sqrt{3},1)$，$Q(\sqrt{3},-2)$ 两点，则椭圆的方程为_____.

解析：本题未给椭圆焦点在哪个坐标轴，若讨论，则比较麻烦，可用待定系数法求解，

设椭圆的方程为 $Ax^2+By^2=1$，其中 $A>0$，$B>0$，且 $A\neq B$，

将 P，Q 两点代入可得：$\begin{cases}12A+B=1\\3A+4B=1\end{cases}$，解得：$A=\frac{1}{15}$，$B=\frac{1}{5}$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$.

答案：$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$

【反思】不知道焦点在哪个坐标轴上时，可考虑将椭圆方程设为 $Ax^2+By^2=1(A>0,B>0,A\neq B)$.

【变式 4】若方程 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，则实数 k 的取值范围为_____.

解析：先将椭圆化为标准方程，再比较分母，$x^2+ky^2=2\Rightarrow\frac{y^2}{\frac{2}{k}}+\frac{x^2}{2}=1$，

因为椭圆焦点在 y 轴上，所以 $\frac{2}{k}>2$，解得：$0<k<1$.

答案：$(0,1)$

【反思】对于椭圆，若焦点在 x 轴，则在其标准方程中，x^2 的分母大；若焦点在 y 轴，则 y^2 的分母大.

【变式 5】（2022・全国甲卷）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{3}$，A_1，A_2 分别为 C 的左、右顶点，B 为 C 的上顶点，若 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$，则 C 的方程为（　　）

（A）$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{16}=1$　（B）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$　（C）$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　（D）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$

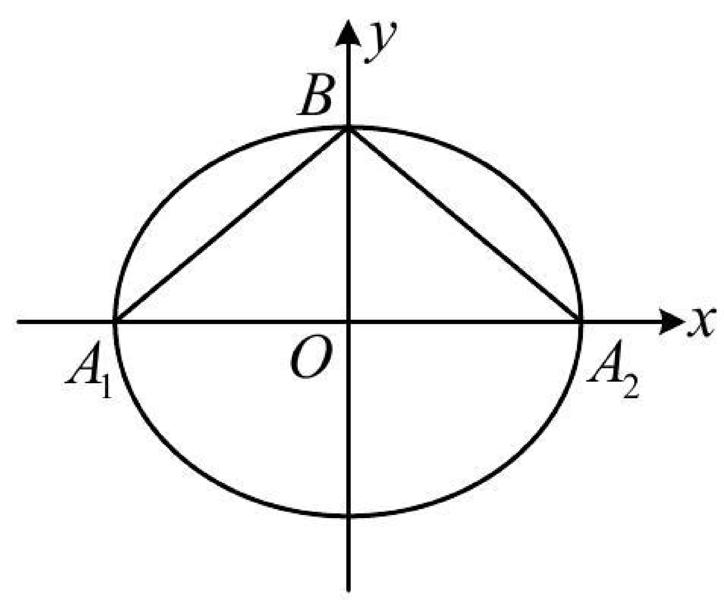
解析：已知离心率，可找到 a，b，c 的比例关系，将变量归一化，

由题意，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$，所以 $a=3c$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{2}c$，如图，$A_1(-3c,0)$，$A_2(3c,0)$，$B(0,2\sqrt{2}c)$，

所以 $\overrightarrow{BA_1}=(-3c,-2\sqrt{2}c)$，$\overrightarrow{BA_2}=(3c,-2\sqrt{2}c)$，从而 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-3c\cdot 3c+(-2\sqrt{2}c)^2=-c^2$，

因为 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$，所以 $-c^2=-1$，从而 $c^2=1$，故 $a^2=9c^2=9$，$b^2=8c^2=8$，所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

答案：B



强化训练

1．（★★）椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 $A(1,0)$，过其焦点且垂直于长轴的弦长为 1，则椭圆的方程为_____.

2．（2023・湖南模拟・★★）椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1(a>\sqrt{3})$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，A 为上顶点，若 ΔAF_1F_2 的面积为 $\sqrt{3}$，则 ΔAF_1F_2 的周长为（　　）

（A）8　（B）7　（C）6　（D）5

3．（2023・安徽蚌埠三模・★★）若椭圆 $C:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{2}=1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，则椭圆 C 的长轴长为（　　）

（A）6　（B）$\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 或 $2\sqrt{6}$　（C）$2\sqrt{6}$　（D）$2\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{6}$

4．（2022・河北衡水中学六调・★★）阿基米德（公元前 287 年至公元前 212 年）不仅是著名的物理学家，也是著名的数学家，他利用“逼近法”得到椭圆的面积除以圆周率等于椭圆的长半轴长与短半轴长的乘积.若椭圆 C 的对称轴为坐标轴，焦点在 y 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$，面积为 12π，则椭圆 C 的方程为（　　）

（A）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$　（B）$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$　（C）$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{32}=1$　（D）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$

5．（★★）已知ΔABC的周长是 8，且$B(-1,0)$，$C(1,0)$，则顶点A的轨迹方程是（　　）

（A）$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1(x\neq\pm3)$　　（B）$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1(x\neq0)$　　（C）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(y\neq0)$　　（D）$\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1(y\neq0)$

6．（★★）已知F_1，F_2是椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$的左、右焦点，$P$为椭圆上一点，$M$为$F_1P$中点，$|OM|=3$，则$|PF_1|=$______.

7．（2023•四川模拟•★★★）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的两个焦点分别为$F_1$，$F_2$，一条平行于$x$轴的直线$l$与椭圆$C$交于$A$，$B$两点，则$|AF_1|+|BF_1|=$（　　）

（A）4　（B）3　（C）2　（D）$2\sqrt{7}$

8．（★★★）已知F_1，F_2为椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$的两个焦点，过$F_1$的直线交椭圆于$A$，$B$两点，若$|AF_2|+|BF_2|=12$，则$|AB|=$______.

9．（★★★）设椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$A(1,1)$，$P$为椭圆$C$上的动点，则$|PA|+|PF_1|$的最大值为_____.